Colle du 13/03 - Sujet 1
Espaces vectoriels et séries

Question de cours. Enoncer et démontrer la caractérisation de deux espaces vectoriels en somme directe par l'intersection.

Exercice 1. Soit $E = \mathscr{C}([0;1];\mathbb{R})$. On définit

$$F = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 0 \right\} \qquad G = \{ g \in E \mid \exists C \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0;1],\ g(t) = C \}.$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E et préciser la décomposition d'un élément $h \in E$.

Exercice 2. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln((n+1)(n+2))}{n(n+3)}$.

Colle du 13/03 - Sujet 2
Espaces vectoriels et séries

Question de cours. Démontrer le théorème d'encadrement série-intégrale.

Exercice 1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$.

Exercice 2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $\left(\left(n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in[\![1;p]\!]}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Colle du 13/03 - Sujet 3
Espaces vectoriels et séries

Question de cours. Montrer que la somme de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ converge.

Exercice 2. Soient $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \right\}$ et $F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0 \right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer un supplémentaire.